

УДК 534.01

EDN: ISPTZX

ПРАКТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДА УСЛОВНОГО ЭКСТРЕМУМА ФАЗОВОЙ СКОРОСТИ В АНАЛИЗЕ ДВИЖЕНИЯ ТРАНСПОРТНОГО СРЕДСТВА В ПОТОКЕ

А.В. ЧернышовORCID: 0009-0005-3717-8333 e-mail: andrey.chernyshov5@mail.ruНижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева
Нижний Новгород, Россия

Обобщен и дополнен предложенный ранее метод условного экстремума фазовой скорости, введено понятие качественного и количественного изменения закона изменения состояния динамической системы, сформирована методологическая основа для использования этого метода. Полученная методологическая основа позволила разработать оригинальный подход к задаче исследования движения транспортного средства в потоке. Результаты могут быть использованы при разработке рекомендаций по безопасному управлению транспортным средством, синтезу алгоритмов управления подвижными объектами, разработке тренажеров, оптимизации движительно-рулевого комплекса транспортных средств и пр.

Ключевые слова: условный экстремум фазовой скорости, годограф фазовой скорости, безопасный алгоритм управления.

ДЛЯ ЦИТИРОВАНИЯ: Чернышов, А.В. Практические аспекты применения метода условного экстремума фазовой скорости в анализе движения транспортного средства в потоке // Труды НГТУ им. Р.Е. Алексеева. 2025. № 1. С. 37-49. EDN: ISPTZX

PRACTICAL USES OF METHOD OF PHASE VELOCITY CONDITIONAL EXTREMUM IN ANALYSIS OF VEHICLE MOVEMENT IN TRAFFIC FLOW

A.V. ChernyshovORCID: 0009-0005-3717-8333 e-mail: andrey.chernyshov5@mail.ruNizhny Novgorod State technical university n.a. R.E. Alekseev
Nizhny Novgorod, Russia

Abstract. The paper generalizes and supplements the method of conditional extremum of phase velocity previously proposed by the author. The concept of qualitative and quantitative change in the law of change of state of a dynamic system is introduced and a methodological basis for using this method is formed. This made it possible to develop an original approach to the problem of studying the movement of a vehicle in a traffic flow. The results can be used in developing recommendations for safe vehicle control, synthesizing control algorithms for moving objects, developing simulators, optimizing the vehicle propulsion and steering systems and so on.

Key words: conditional extremum of phase velocity, phase velocity hodograph, safety control algorithm.

FOR CITATION: A.V. Chernyshov. Practical uses of method of phase velocity conditional extremum in analysis of vehicle movement in traffic flow. Transactions of NNSTU n.a. R.E. Alekseev. 2025. № 1. Pp. 37-49. EDN: ISPTZX

Введение

Поиск методов исследования динамических свойств технических систем остается актуальным на протяжении более ста лет. За столь длительный период был разработан специализированный теоретический аппарат. Теория, которая изначально опиралась на аппарат обыкновенных дифференциальных уравнений, выделилась в отдельную научную дисципли-

ну – теорию автоматического регулирования. Ее основы были заложены И.А. Вышнеградским и Д.К. Максвеллом, необходимо упомянуть также А.М. Ляпунова и его теорию устойчивости движения «в малом». Сформировались математически обоснованные и практически проверенные методы и подходы к исследованию линейных и нелинейных систем. В процессе накопления опыта и развития инструментов исследования у динамических систем обнаруживались различные особенности, важные для практического применения. Как справедливо было замечено И.В. Зубовым, «... необходимость разработки новых качественных и количественных методов исследования динамики систем, ... связана с поиском условий устойчивого, надежного и безопасного функционирования сложных динамических систем ...» [1].

Один из наиболее удобных и наглядных методов исследования динамических систем на плоскости является метод фазовой плоскости [2]. Под динамической системой понимается любой объект или процесс, для которого однозначно определено понятие состояния как совокупности некоторых величин в данный момент времени, и задан закон, который описывает изменение (эволюцию) начального состояния с течением времени. Фазовая плоскость образуется декартовой системой координат, по осям которой откладываются координаты состояния или их производные (рис. 1). Будем рассматривать класс объектов, динамика которых описывается двумя автономными дифференциальными уравнениями первого порядка с непрерывными на всей фазовой плоскости правыми частями, которые имеют непрерывные первые производные:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = P(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = Q(x, y) \end{cases} \quad (1)$$

Пара (x, y) определяет на фазовой плоскости состояние системы в определенный момент времени. Дифференциальные уравнения (1) задают закон изменения координат состояния динамической системы. Решение уравнения, при заданных начальных условиях (x_0, y_0, t_0) , есть кривая, заданная параметрическим уравнением $l = F(x, y)$, где $x = f_1(x_0, y_0, t)$, $y = f_2(x_0, y_0, t)$. Такая кривая называется фазовой траекторией или интегральной кривой. Изображающая точка движется вдоль фазовой траектории. Скорость v , с которой изображающая точка пробегается по фазовой траектории называется фазовой скоростью, модуль которой вычисляется по формуле: $v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$. В стационарных точках

(точка m_3 на рис. 1) $\frac{dx}{dt} = 0$ и $\frac{dy}{dt} = 0$, поэтому фазовая скорость $v = 0$.

В [3] было показано, что на фазовой плоскости динамической системы могут быть выделены области с различным типом движения изображающей точки (по сути, речь идет о фазовом ускорении вдоль фазовой траектории; области различного типа движения изображающей точки – те, где ускорение имеет разные знаки): ускоренным и замедленным (области A и D на рис. 1).

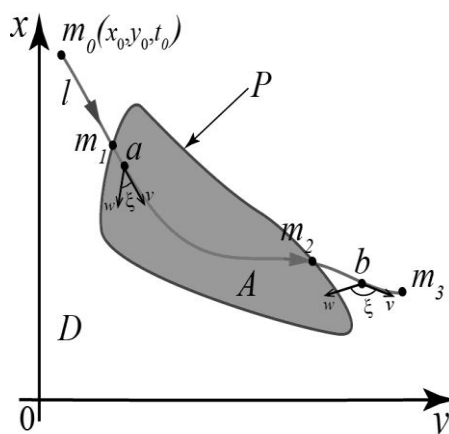


Рис. 1. Интегральная кривая l на фазовой плоскости.

Области ускоренного (A) и замедленного (D) движений изображающей точки, граница (P) между ускоренным и замедленным типами движений

Fig. 1. Trajectory l above the phase plane.

Areas of accelerated (A) and decelerated (D) types of motion of representative point, border line (P) of accelerated and decelerated types of motions

Суть предлагаемого метода заключалась в замене изображающей точки материальной с единичной массой и рассмотрении кинематики криволинейного движения. Предполагалось, что материальная точка перемещается по криволинейной траектории со скоростью v и ускорением w в плоскости xOy под действием условных обобщенных сил. В зависимости от угла между вектором скорости и ускорения выбирался тип движения: если угол ξ острый – ускоренное (точка a , рис. 2), и замедленное (точка b , рис. 2), если угол ξ тупой. Действительно, вектор ускорения w , с которым движется материальная точка, раскладывается на две составляющие: касательную w_τ и нормальную w_n (рис. 2). Скорость и касательное ускорение связаны формулами (ρ – кривизна траектории):

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= w_\tau \\ w_n &= \frac{v^2}{\rho} \end{aligned} \tag{2}$$

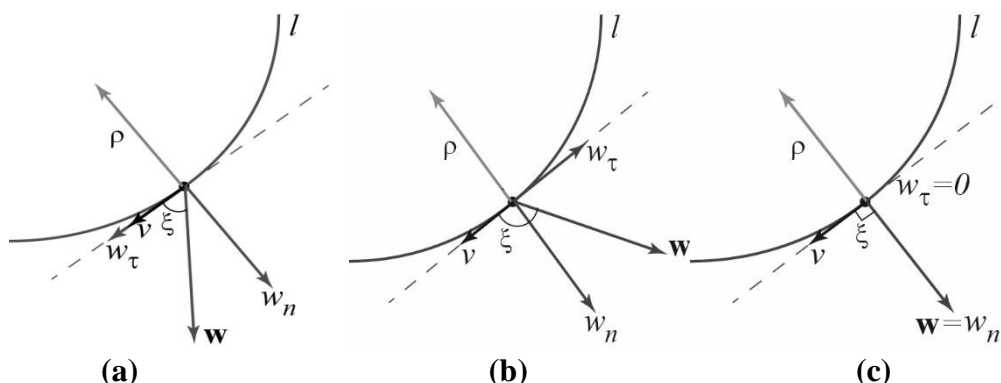


Рис. 2. К выбору типа движения изображающей точки: (а) – ускоренное; (б) – замедленное;

(с) – граница между ускоренным и замедленным движением $w_\tau = 0$, $\xi = \pm \frac{\pi}{2}$

Fig. 2. Towards the choice of the type of motion of representative point: (a) – accelerated;

(b) – decelerated; (c) – border line of the accelerated and decelerated motions $w_\tau = 0$, $\xi = \pm \frac{\pi}{2}$

Интуитивно понятно, что граница между ускоренным и замедленным движением (P на рис. 1) соответствует равномерному движению, т.е., если $\xi = \pm \frac{\pi}{2}$, то $w_\tau = 0$ (рис. 2с).

Фактически граница P или условие $\xi = \pm \frac{\pi}{2}$ определяет на фазовой плоскости геометрическое место критических точек, в которых $\frac{dv}{dt} = 0$ и, одновременно, $v \neq 0$. Если при каких-либо начальных условиях $l \cap P$, то найдутся точки (m_1 и m_2 , рис. 1), которые могут являться экстремумом фазовой скорости на $l = F(x, y)$ (такой экстремум в математическом анализе называется *условным* или *относительным* [4]), т.е. сформируется множество $M = \{m_1, m_2\}$. Рассмотрим выполнение необходимых и достаточных условий существования условного экстремума в точках m_1 и m_2 (рис. 1). Для этого будем использовать усовершенствованный метод фазовой плоскости [5], суть которого заключается в построении годографа фазовой скорости $G = \hat{F}\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$ в декартовой системе координат $\frac{dx}{dt} O \frac{dy}{dt}$ (рис. 3) и поиска *точек касания* изолиний фазовой скорости и G . Годограф фазовой скорости – кривая G , вычерченная концом радиус-вектора R :

$$R = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

$$\operatorname{tg}(\varphi) = \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dx}{dt} = R \cos(\varphi)$$

$$\frac{dy}{dt} = R \sin(\varphi)$$

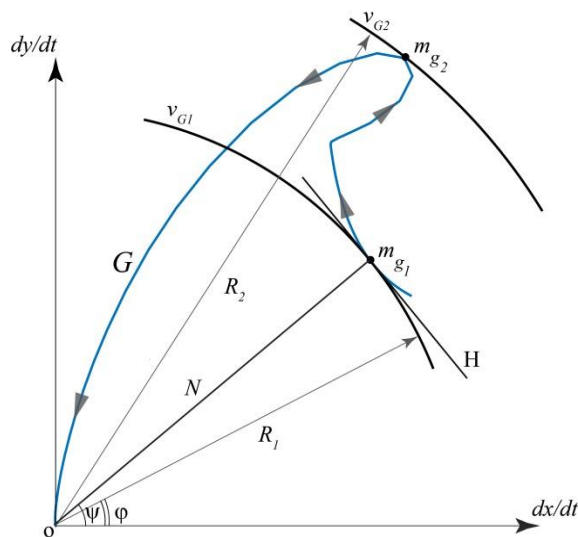


Рис. 3. Годограф фазовой скорости. На участке $m_{g_1} - m_{g_2}$ изображающая точка движется ускоренно (находится в области A фазовой плоскости). Радиус-векторы R_i , проведенные к точкам m_{g_i} , располагаются на одной прямой с соответствующими нормальными N

Fig. 3. Phase velocity hodograph. At the part of trajectory $m_{g_1} - m_{g_2}$ representative point has accelerated motion (the point is in the A). Radius-vectors R_i , traced to the m_{g_i} , are in the common line and it have own normal N

Формирование множества, определяющего закон изменения состояний динамической системы

Понятие состояния (S) является одним из ключевых в теории управления. Для подвижных объектов состояние, как правило, описывается координатами материальных точек и их скоростями. Такое описание должно быть достаточным для того, чтобы определить его дальнейшее изменение (закон изменения) по нему самому.

Множество $V = \{v_{G_1}, \dots, v_{G_k}\}$ - множество изолиний $v = c_i, (c_i \in \mathfrak{R}, c_i > 0)$ на плоскости $\frac{dx}{dt} O \frac{dt}{dt}$. Очевидно, что это окружности радиуса $R = \sqrt{c_i}$ с центром в точке $O(0,0)$. Отметим точки касания изолинии и годографа $G : M_G = \{m_{g_1}, \dots, m_{g_n}\}$ (рис. 3: т. m_{g_1}, m_{g_2}). Проанализируем точки касания на выполнение необходимого условия существования условного экстремума. Известно, что необходимое условие выполняется в тех критических точках, в которых градиенты функций коллинеарны. Таким образом, в рассматриваемой задаче проверим коллинеарность ∇G и ∇v в *общей точке касания*, т.е., другими словами, радиус-вектор R_i и нормаль N должны быть расположены на одной прямой. Принимая во внимание, что изолинии v_{G_i} - окружности, сделаем вывод, что радиус R , проведенный в точку касания, ортогонален касательной H и расположен на одной прямой с нормалью к v_{G_i} . В то же время нормаль в точке касания есть ∇G . Поскольку H - общая касательная, ∇G и ∇v расположены на одной прямой и $tg(\varphi) = tg(\psi)$ (рис. 3). Таким образом, *необходимое* условие условного экстремума для множества M_G выполняется.

Используя формулы из [3], выведем критерий, для $\xi = \pm \frac{\pi}{2}$:

$$\arccos \left(\frac{\frac{d^2x}{dt^2}}{\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2}} \right) \pm \arccos \left(\frac{\frac{dx}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}} \right) = \pm \frac{\pi}{2} \quad (3)$$

Для проверки на *достаточность* убедимся, что в т. m_{g_i} именно касание, а не перегиб (рис. 4). Методы анализа графиков функций на наличие точек перегиба хорошо известны. Для использования на практике, когда неизвестна математическая модель, предлагаем выполнять проверку на достаточность путем проверки величины $\Delta R = R(\varphi_g) - R(\varphi_i), i=1,2$ (рис. 4) на смену знака при переходе через точку m_g . После проверки на достаточность сформируем множество $\bar{M}_G \subseteq M_G$, на котором выполнено достаточное условие условного экстремума.

Каждому элементу множества \bar{M}_G соответствует элемент множества V . Выписав пары $(m_{g_i}, R(v_{G_i}))$ в хронологическом порядке и сравнив значения $R(v_{G_i})$ для каждой пары, определим условные минимумы или максимумы.

Годограф фазовой скорости G получается путем непрерывного отображения l на плоскость $\frac{dx}{dt} O \frac{dt}{dt}$. Также верно, что существует непрерывное отображение для множества $V = \{v_{G_1}, \dots, v_{G_k}\}$ на плоскость xOy . Таким образом, если на G найдутся точки условного экстремума (общие для G и V), то эти точки будут отражены на l , т.е. существует непрерывное отображение $f : \bar{M}_G \rightarrow M$. Пары $(m_i, R(v_{G_i}))$, которые содержат координаты m_i и ее скорости $R(v_{G_i})$, могут быть использованы для описания изменения состояния динамической системы.

Достаточность такого описания определяется тем, что пары $(m_i, R(v_{G_i}))$ на фазовой траектории образуют геометрическое место точек, фазовая скорость которых принимает экстремальные значения. Множество, сформированное парами $(m_i, R(v_{G_i}))$, задает закон изменения состояний вдоль траектории.

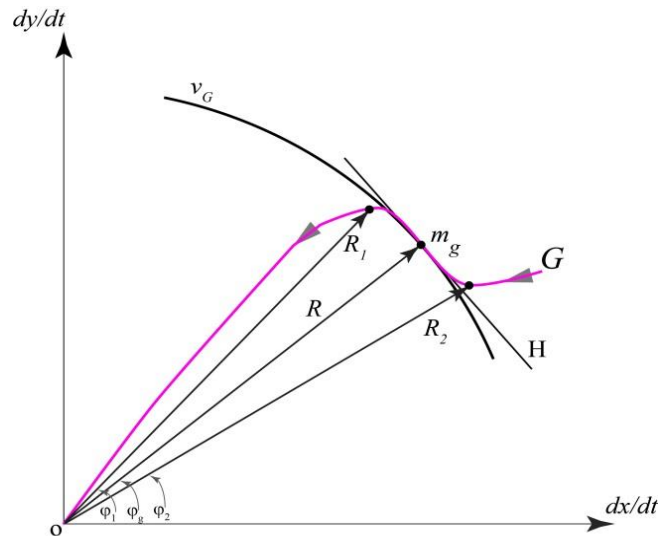


Рис. 4. Необходимое условие условного экстремума выполнено, а достаточное нет: в точке касания перегиб G . При переходе через точку m_g происходит смена знака ΔR

Fig. 4. The necessary criterion of the conditional extremum is fulfilled, but the sufficient criterion is not: there is an inflection G at the point of contact.

The ΔR sign changes when passing through a point m_g

Методология оценки изменений закона, определяющего смену состояний динамических систем методом условного экстремума фазовой скорости

Продемонстрируем применение метода условного экстремума для оценки изменения закона, определяющего смену состояния динамической системы второго порядка методом условного экстремума фазовой скорости:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax + by \\ \frac{dy}{dt} = cx + dy \end{cases} \quad (4)$$

На фазовой плоскости интегральные кривые могут быть в виде спирали (стационарное состояние – фокус (стационарное состояние «узел» топологически эквивалентно «фокусу»)), седла, эллипса (предельный цикл). Вид интегральных кривых определяется корнями λ_1, λ_2 характеристического уравнения системы (4), которые, в свою очередь, зависят от коэффициентов (a, b, c, d) [6]. Рассмотрим, для примера, случай, когда $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathfrak{R}$ и $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} < 0$

(особая точка – седло). Система (4) может быть приведена к каноническому виду:

$$\begin{cases} \frac{d\bar{x}}{dt} = \lambda_1 \bar{x} \\ \frac{d\bar{y}}{dt} = \lambda_2 \bar{y} \end{cases} \quad (5)$$

Деля одно уравнение на другое и интегрируя, получим уравнение интегральной кривой:

$$\bar{y} = C|\bar{x}|^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} \quad (6)$$

Фазовая скорость есть функция правых частей дифференциального уравнения, описывающего динамику системы. Для (5) запишем:

$$v = \sqrt{\left(\frac{d\bar{x}}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\bar{y}}{dt}\right)^2} = \sqrt{(\lambda_1\bar{x})^2 + (\lambda_2\bar{y})^2}$$

Геометрическое место критических точек фазовой скорости найдем из условия $\frac{dv}{dt} = 0, v \neq 0$:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial \bar{x}} \lambda_1 \bar{x} + \frac{\partial v}{\partial \bar{y}} \lambda_2 \bar{y} = -\frac{\lambda_1^3 \bar{x}^2 + \lambda_2^3 \bar{y}^2}{\sqrt{(\lambda_1 \bar{x})^2 + (\lambda_2 \bar{y})^2}} = 0, \quad \bar{x} \neq 0, \bar{y} \neq 0 \quad (7)$$

На фазовой плоскости экстремумы фазовой скорости будут расположены на прямых, задаваемых уравнением $\frac{dv}{dt} = 0$ или $p(x, y) = \lambda_1^3 \bar{x}^2 + \lambda_2^3 \bar{y}^2 = 0$ (рис. 5). Прямые $p(x, y) = 0$ – границы областей ускоренного (A) и замедленного (D) движений изображающей точки. Точка пересечения фазовой траектории (рис. 5а: т. m_1) с $p(x, y)$ – условный экстремум. Критические точки можно найти аналитически, как общие точки интегральной кривой и $p(x, y)$:

$$C|\bar{x}|^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} = -\frac{\lambda_1^3}{\lambda_2^3} \bar{x}^2$$

Получение аналитического решения методом множителей Лагранжа для нашего примера нецелесообразно, так как уравнение связи можно представить в виде $\bar{y} = f(\bar{x})$ и, поэтому, поиск условного экстремума сводится к поиску обычного экстремума подстановкой (6) в (7). Данный алгоритм здесь не приводится, так как он идентичен поиску условий общих точек интегральной кривой и $p(x, y)$.

Для случая $\bar{x} > 0$:

$$\bar{x}^{2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}-1\right)} = -\frac{\lambda_1^3}{\lambda_2^3} C \quad \text{или} \quad \bar{x} = 2n \sqrt{-\frac{\lambda_1^3}{\lambda_2^3} C}, \quad \text{где } C \text{ – константа интегрирования,}$$

$n = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} - 1 < 0$. Таким образом, на каждой интегральной кривой существует один экстремум.

Годограф фазовой скорости изображен на рис. 5б. Фазовая скорость в условном экстремуме определяется радиусом r (рис. 5б).

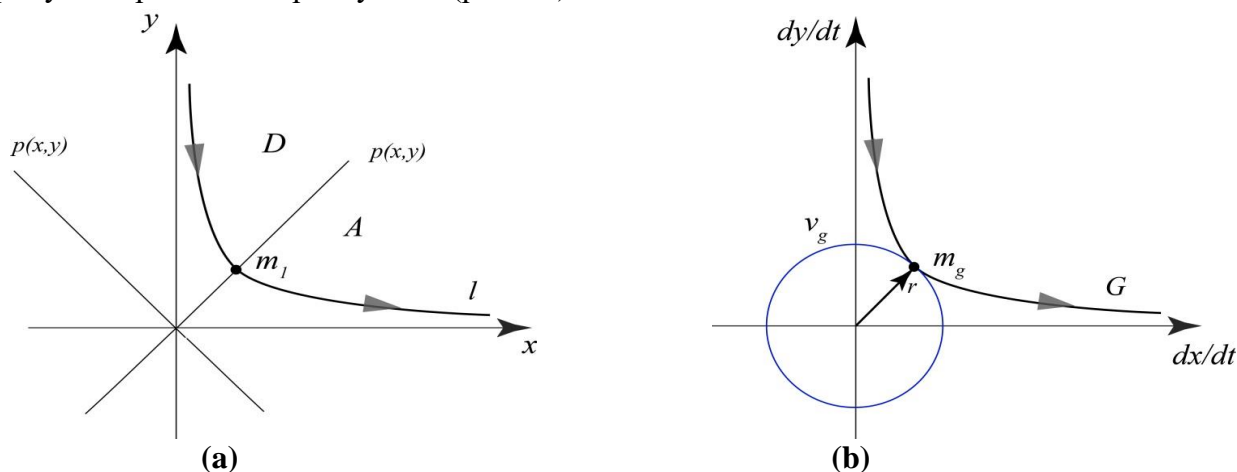


Рис. 5. К определению множества (m_1, r) системы (4)

Fig. 5. Towards the definition of the set (m_1, r) of the system (4)

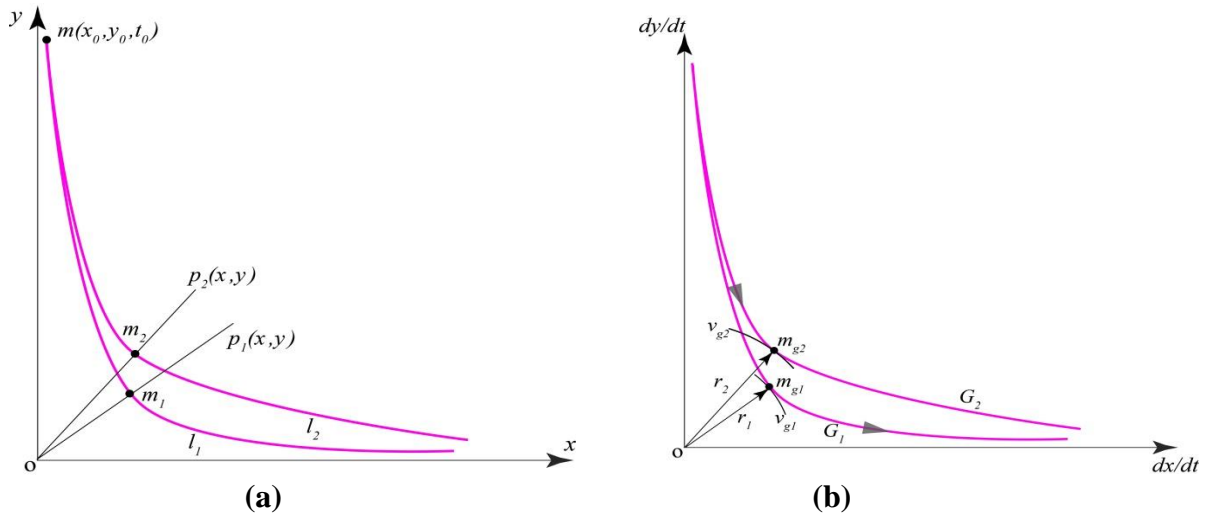


Рис. 6. Качественное изменение состояния динамической системы при изменении коэффициентов модели: в т. m_1 условного экстремума кривой l_1 фазовая скорость равна r_1 , а в т. m_2 условного экстремума кривой l_2 фазовая скорость равна r_2

Fig. 6. Qualitative change in the state of a dynamic system due to variation of the model coefficients: at the point m_1 of the conditional extremum of the curve l_1 the phase velocity is equal to r_1 , and at the point m_2 of the conditional extremum of the curve l_2 the phase velocity is equal to r_2

Допустим, в динамической системе (4) произошли изменения, что нашло отражение в изменении коэффициентов (a, b, c, d) . Обозначим исходный набор коэффициентов (a_1, b_1, c_1, d_1) , а измененный (a_2, b_2, c_2, d_2) . Далее будем рассматривать две траектории l_1 и l_2 , выпущенные из одной точки фазовой плоскости (рис. 6а). Траектория l_1 – решение (4), если коэффициенты равны (a_1, b_1, c_1, d_1) , l_2 – если (a_2, b_2, c_2, d_2) . Закон изменения состояний динамической системы для первого случая определен парой (m_1, r_1) , а для второй – (m_2, r_2) . Закон изменения состояний динамической системы изменился *качественно*, так как число экстремумов осталось прежним, изменилось только значение фазовой скорости (рис. 6).

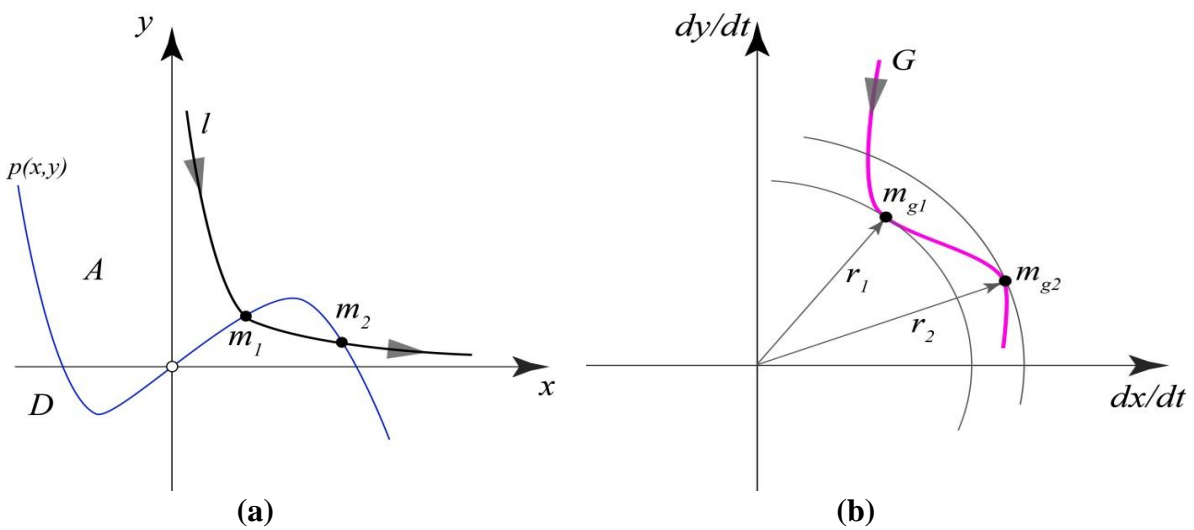


Рис. 7. Количественные изменения в динамике системы: состояние системы определяется двумя парами: (m_1, r_1) и (m_2, r_2)

Fig. 7. Quantitate changes in the dynamics of the system: the state of the system is determined by two pairs: (m_1, r_1) и (m_2, r_2)

Пусть в процессе эксплуатации система (4) изменилась:

$$\begin{cases} \frac{d\bar{x}}{dt} = \lambda_1 \bar{x} + \bar{x}^2 \\ \frac{d\bar{y}}{dt} = \lambda_2 \bar{y} \end{cases} \quad (8)$$

Уравнение интегральной кривой системы (8):

$$\frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} = \frac{\lambda_2 \bar{y}}{\bar{x}(\lambda_1 + \bar{x})}$$

Интегралы табличные, поэтому запишем:

$$y = C \left| \frac{\lambda_1 + \bar{x}}{\bar{x}} \right|^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} \quad (9)$$

Геометрическое место критических точек фазовой скорости $\left(\frac{dv}{dt} = 0 \right)$:

$$p(x, y) = (\lambda_1 + 2\bar{x})(\lambda_1 \bar{x} + \bar{x}^2)^2 + \lambda_2^3 \bar{y}^2 = 0 \quad (10)$$

Если $\frac{\lambda_1 + \bar{x}}{\bar{x}} > 0$, то подставляя (9) в (10):

$$p(x, y) = (\lambda_1 + 2\bar{x})(\lambda_1 \bar{x} + \bar{x}^2)^2 + C \lambda_2^3 \left(\frac{\lambda_1 + \bar{x}}{\bar{x}} \right)^{2 \frac{\lambda_2}{\lambda_1}} = 0$$

На рис. 7а показана рассчитанная численно кривая $p(x, y)$ для системы (8). Построив годограф фазовой скорости (рис. 7б), определим точки условного экстремума сначала на годографе, а затем отобразим их на фазовую плоскость (рис. 7а). В итоге вместо одной пары (m_1, r_1) получим две: (m_1, r_1) и (m_2, r_2) , характеризующие новый закон изменения состояний динамической системы. Это *количественное* изменение.

Практическое приложение предлагаемой методологии

Оценка закона изменения состояния методом условного экстремума фазовой скорости – универсальный метод, применимый для анализа различных динамических систем. В частности, он может быть использован для решения задачи синтеза алгоритмов управления подвижными объектами, обеспечивающими безопасное передвижение в потоке. Новизна подхода к решаемой задаче заключается в характеристике синтезируемого «безопасного алгоритма». Термин «безопасный алгоритм управления» в специальной литературе однозначно не определен, хотя в большинстве случаев он интуитивно понятен. В задачах управления подвижными объектами он может трактоваться как управление, обеспечивающее минимум (ли отсутствие) аварий. В данной работе «безопасный алгоритм» связывается с безопасным стилем вождения. Учитывая, что термин «стиль вождения» является устоявшимся и используется преимущественно в рамках социально-психологических исследований, в статье вводится термин «динамика объекта в потоке», который объединяет динамические характеристики транспортного средства и стиль вождения, определяясь психоэмоциональным состоянием водителя, а также другими характеристиками личности, имеющими отношение к процессу управления автомобилем.

Автомобиль управляется человеком-оператором (водителем), который формирует индивидуальный алгоритм управления. Очевидно, что алгоритм управления не может быть одинаковым для всех ТС, движущихся в потоке, так как на его формирование оказывают влияние: психоэмоциональное состояние водителя [7], конструктивные и динамические осо-

бенности транспортного средства. В то же время, на все без исключения ТС в потоке действуют общие ограничения в виде правил дорожного движения, априорной мотивации водителя [8], светофоров, перекрестков и пр. Таким образом, движение ТС в потоке *упорядоченное* (это утверждение имеет место на интервале времени). Порядок тем выше, чем «плотнее» движение. Рассмотрение транспортного потока с точки зрения упорядоченности в данной статье подробно не освещается. Отметим, что энтропийный подход не является новым и был использован, например, в [8]. Упорядоченное движение характеризуется невысокой (в пределе – нулевой) энтропией. Это значит, что транспортные средства, движущиеся в одном потоке, в каждый момент времени находятся в (почти) одинаковом состоянии. Можно предположить, что законы изменения ТС в одном упорядоченном потоке статистически одинаковые. Это, также, означает, что водитель так воздействует на управляющие органы ТС, чтобы закон изменения состояний совпадал с законом изменения состояний большинства ТС в потоке. Сформулируем определение: *безопасный алгоритм управления – алгоритм, при котором транспортное средство, двигаясь в потоке, не увеличивает энтропию.*

Таким образом, возникает ряд взаимодополняющих задач. Первая связана с необходимостью описания закона изменения состояния ТС, двигающихся в потоке. Вторая связана с синтезом алгоритма управления по известному закону изменения состояния. Третья задача – оценка технической возможности ТС к реализации безопасного алгоритма.

В данной работе мы подробно остановимся на решении первой задачи. Ранее было предложено описывать состояние динамической системы парой $(m_i, R(v_{G_i}))$ или $(m_{g_i}, R(v_{G_i}))$. Рассмотрим движение в транспортном потоке (подобные задачи рассматриваются в теории массового обслуживания, теории игр и др. [9, 10]). Траектория движения – кривая на плоскости географических координат X-Y. Кривая строится по точкам, которые могут быть получены, например, по данным GPS-приемника. Для этого в процессе эксперимента использовался туристический навигатор GARMIN, который фиксировал путевые точки с постоянным шагом, равным 1 сек. После обработки массив точек был нанесен на плоскость X-Y (рис. 8).

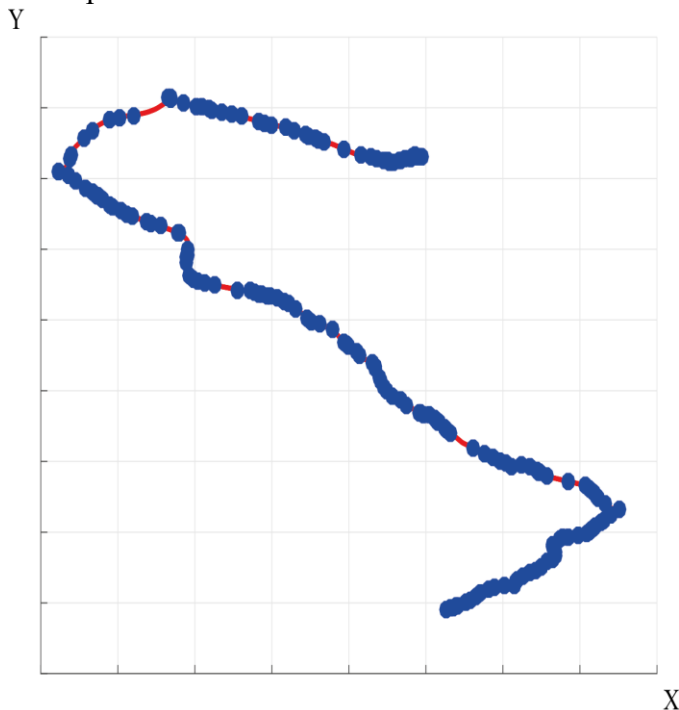


Рис. 8. Часть трассы «Дзержинск – Ардатов».

*Траектория движения транспортного средства на плоскости географических координат.
Точками нанесены экстремумы фазовой скорости*

Fig. 8. Part of the Dzherzhinsk – Ardatov route.

*The trajectory of the vehicle on the plane of geographic coordinates.
The dots indicate the phase velocity extremes*

Пары $(m_i, R(v_{G_i}))$ наносятся на траекторию. Однако использование фазовой плоскости в данном случае не наглядно. Удобнее использовать плоскость годографа фазовой скорости $\frac{dx}{dt} O \frac{dy}{dt}$, на котором экстремумы фазовой скорости – множество (облако) точек (S). Фазовая скорость (скорость движения ТС вдоль траектории) на плоскости годографа задается окружностями радиуса $R(v_{G_i})$. Выполним сегментирование плоскости годографа окружностями, выбрав, предварительно, диапазоны фазовых скоростей (рис. 9). После этого, в качестве топологического описания облака S будем рассматривать полигон частот распределения точек в соответствующих кольцах (рис. 10).

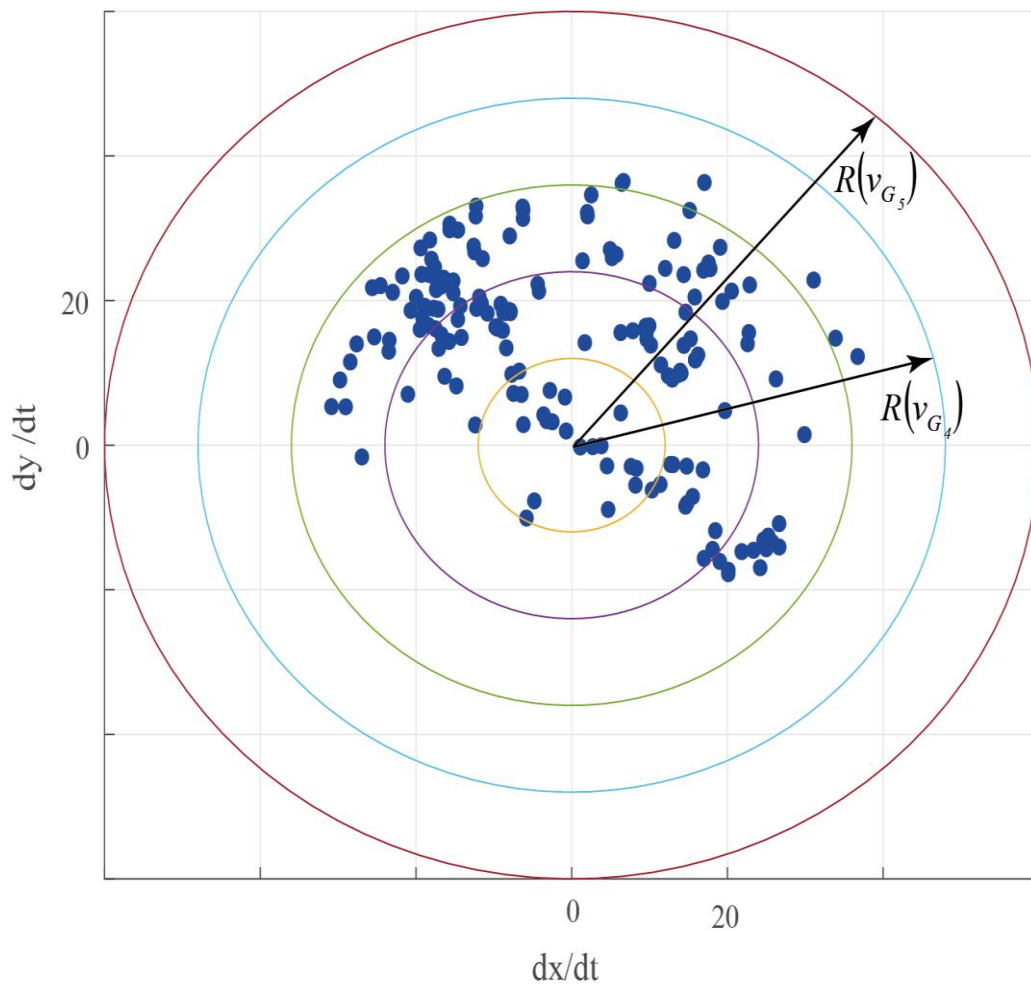


Рис. 9. Облако точек S на сегментированной плоскости годографа фазовой скорости (при движении по трассе на рис. 8)

Fig. 9. Cloud of points S on the segmented plane of the phase velocity hodograph (when moving along the route on fig. 8)

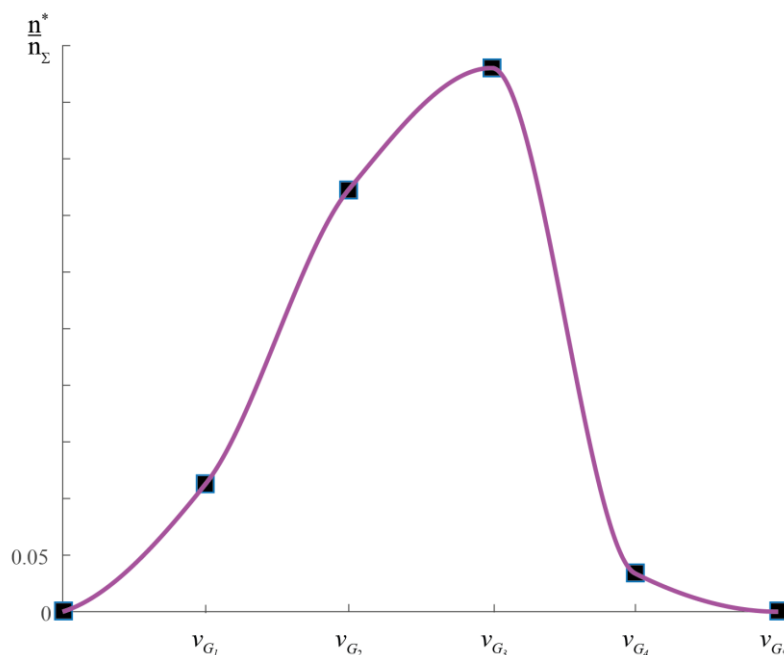


Рис. 10. Полигон частот распределения условных экстремумов фазовой скорости – топологическое описание облака точек рис. 9:

n^* – число точек в i -м кольце, n_Σ – общее число точек в облаке

Fig. 10. Polygon of frequency distribution of conditional extremum of phase velocity is a topological description of cloud of points in fig. 9:

n^* is the number of points in the i -th segment, n_Σ is the total number of points in the cloud

Заключение

Топологическое описание облака точек, полученное при анализе движения транспортного средства, характеризует закон изменения его состояния. Экспериментально подтверждено, что при движении за городом на разных участках (в светлое время суток в будни), на разных легковых автомобилях, управляемыми разными водителями (стаж не менее 15 лет) кривая распределения точек в облаке имеет форму рис. 10. Это подтверждает предположение о том, что в упорядоченном потоке ТС законы изменения состояний отдельных элементов совпадают.

Метод условного экстремума фазовой скорости применительно к задаче исследования движения транспортного средства в потоке позволяет найти общий для всех ТС закон изменения состояний выбранном участке трассы. Результаты могут быть использованы при разработке рекомендаций по безопасному управлению транспортным средством, синтезу алгоритмов управления подвижными объектами, разработке тренажеров, оптимизации движительно-рулевого комплекса транспортных средств и пр.

Библиографический список

1. **Зубов, И.В.** Методы анализа динамики управляемых систем / И.В. Зубов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 224 с.
2. **Андронов, А.А.** Теория колебаний / А.А. Андронов, А.А. Витт, С.Э. Хайкин. – М.: Физматгиз, 1959. – 916 с.
3. **Chernyshov A.V., Chernyshova S.A.** A method of investigating the phenomenon of bifurcation memory in the dynamics of river vessels. Russian Journal of Nonlinear. Dynamics. 2022. V. 18. № 2. Pp. 171-181. DOI: 10.20537/nd220202
4. **Зорич, В.А.** Математический анализ. Часть I. / В.А. Зорич. – М.: МЦНМО, 2019. – 564 с.

5. **Чернышов, А.В.** Совершенствование метода фазовой плоскости для исследования влияния эффекта «бифуркационной памяти» на динамику корабля / А.В. Чернышов, С.А. Чернышова // Изв. РАН. МТТ. 2024. № 1. С. 38-47. DOI: 10.31857/S0572329923600111
6. **Андронов, А.А.** Качественная теория динамических систем второго порядка / А.А. Андронов, Е.А. Леонтович, И.И. Гордон, А.Г. Майер. – М.: Наука, 1966. – 568 с.
7. **Лобанова, Ю.И.** Вождение – как деятельность, поведение и стилевая характеристика // Вестник Ленинградского государственного университета им. А.С. Пушкина. 2014. Т. 5. № 4. С. 97-107.
8. **Колесниченко, А.В.** Конструирование энтропийной транспортной модели на основе статистики Тсаллиса // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2013. № 33. 23 с.
9. **Малинецкий, Г. Г.** Дорожное движение в контексте фундаментальных исследований / Г.Г. Малинецкий, В.В. Семёнов // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2007. № 64. 29 с.
10. **Гасников, А.В.** Введение в математическое моделирование транспортных потоков: учебное пособие / А.В. Гасников. – М.: МЦНМО, 2012. – 376 с.

*Дата поступления
в редакцию: 29.01.2025*

*Дата принятия
к публикации: 20.02.2025*